パラメータが Core に属するときの A-超幾何級数

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
長峰実央 (Mao NAGAMINE) *

概要

ジェネリックなパラメータにおける A-超幾何系の基本解は Gel'fand らによって示されている．パラメータが特殊な場合は Okuyama, Saito によって，特定の条件下でフロベニウスの方法の適用が確認された．しかし，実際の計算で使うには，適用するための条件と解空間の基底の計算という２段階のとてつもない計算量の多さを考慮するとかなり困難である．そこで三角形分割に注目することで，これらの計算を必要とせず，容易に計算できる条件を示し,fake exponent の負の整数部分が同条件を満たしているときに, フロベニウスの方法で A-超幾何級数が構成できることを示した.

本講演は [3] の内容に基づく．

1　導入

A-超幾何系とは，1970 年代に W. Miller Jr. らによって定義され，1980 年代後半に Gel'fand らにより組織的な研究が開始された，行列 A とパラメータ β によって定まる線型偏微分方程式系であり，Gauss の超幾何微分方程式を多変数に拡張したものである．この方程式系の特徴の一つとして，凸多面体の三角形分割を用いて幾何的に記述できるというものがある．A-超幾何級数解に関する先行研究として，Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky はパラメータがジェネリックの場合に三角形分割を用いた方法で解空間の基底を構成した [2]．この時の解空間の基底の個数は A の体積と一致することが [1] によって示されている．この場合のすべての基底は log を持たない．Saito, Sturmfels, Takayama はパラメータが特殊な場合について，ジェネリックなものから特殊なものへの極限を考えることで A の体積分の log を含む解空間の基底を求めている [5]. しかし，パラメータが特殊な場合は解空間の基底の個数が体積よりも大きくなり得るため，その場合に A の体積以上の解は構成できない．Okuyama, Saito は決定方程式の指数を摂動することで，特定の条件下でフロベニウスの方法で log を含む解空間の基底が構成できることを示した [4]．しかし，この方法を用いるために行う計算は一般的には困難であり，実際に解を求めることは現実的ではない．

本研究では，Okuyama, Saito によるフロベニウスの方法において，ジェネリックな重みベクトルから得られる三角形分割に注目し，全ての単体の頂点の共通部分と指数 v の負の整数部分が特定の条

* E-mail:nagamine.mao.d9@elms.hokudai.ac.jp

件の場合に，摂動関数

$$F_{\mathcal{N}}(x,s) := \sum_{u\in L'} a_u(s)x^{v+Bs+u}$$

が，$s=0$ で極を持たないことを示した．ここで，B は $L=(\mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}A)$ の基底で，L' は L のある部分集合である．すなわち，mod L で重複をもつ fake exponent の負の成分が上記の条件を満たしている場合に，フロベニウスの方法によって，v に関する A-超幾何級数を構成できることを示した．この結果の恩恵は，上記で述べた煩雑な計算が楽になるという点である．また，よくある具体的な例として A が unimodular のときでパラメータが Core に属している場合でも同様のことが言えることがわかったので，本講演ではそれらを紹介する．

2 準備

2.1 A-超幾何系

$A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=(a_{ij})\in M_{d\times n}(\mathbb{Z})$ とし，$\mathrm{rank}A=d$ とする．また，$\boldsymbol{a}_j$ たちは原点を通らない超平面に属すると仮定する．

$$I_A=\langle \partial^{\boldsymbol{u}}-\partial^{\boldsymbol{v}} \mid A\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{N}^n\rangle \subseteq \mathbb{C}[\boldsymbol{\partial}].$$

を A から決まるトーリックイデアルという．パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_d)^T\in\mathbb{C}^d$ が与えられたとき，

$$M_A(\beta)+D/(DI_A+\sum_{i=1}^{d}D(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\theta_j-\beta_i))$$

をパラメータベクトル β を持つ A-超幾何系という．ここで，D はワイル代数 $D=\mathbb{C}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\partial}\rangle$ で，$\theta_j=x_j\partial_j$ である．

2.2 主定理に向けた記号

まずは [4] の記号を基に今回の結果に向けた改良をする．

$\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)^T\in\mathbb{C}^n$ に対して，$\mathrm{supp}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v})$ をそれぞれ

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{v}) := \{j\in\{1,\ldots,n\}\mid v_j\neq 0\},$$
$$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) := \{j\in\{1,\ldots,n\}\mid v_j\in\mathbb{Z}_{<0}\},$$

で定義する．また $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{u}\in\mathbb{N}^n$ に対して，

$$[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{u}} := \prod_{j=1}^{n} v_j(v_j-1)\cdots(v_j-u_j+1).$$

ここで $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ であることを述べておく．

さらに $\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_+-\boldsymbol{u}_-$ で書ける．ここで，$\boldsymbol{u}_+,\boldsymbol{u}_-\in\mathbb{N}^n$, $\mathrm{supp}(\boldsymbol{u}_+)\cap\mathrm{supp}(\boldsymbol{u}_-)=\emptyset$ である．

仮定 2.1. $B = \{\boldsymbol{b}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{b}^{(h)}\}$ は $L_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ の基底とし，$B \in M_{n\times(n-d)}(\mathbb{Z})$ と見ることにする．これは B のどの行も 0 ベクトルでないことを意味している．

$\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_h)^T$ を新たな変数とし，$j = 1, \dots, n$ に対して，

$$(B\boldsymbol{s})_j = \sum_{k=1}^{n-d} b_j^{(k)} s_k \in \mathbb{C}[\boldsymbol{s}] := \mathbb{C}[s_1, \dots, s_{n-d}].$$

また，$J \subset \{1, \dots, n\}$ に対して，

$$(B\boldsymbol{s})_J := \prod_{j\in J} (B\boldsymbol{s})_j \in \mathbb{C}[\boldsymbol{s}]$$

とおく．ここで，$J \not\subset \mathrm{supp}(B) \Rightarrow (B\boldsymbol{s})_J = 0$ なので，$j \notin \mathrm{supp}(B) \Rightarrow (B\boldsymbol{s})_j = 0$ である．$\mathrm{supp}(B) = n$ はこのような状況が起こらないことを保証している．

$\boldsymbol{w}$ をジェネリックなウェイトベクトルとする．

$$\mathcal{G} := \{\partial^{\boldsymbol{g}^+_{(i)}} - \partial^{\boldsymbol{g}^-_{(i)}} \mid i = 1, \dots, m\}$$

を I_A の $\boldsymbol{w}$ に関する被約グレブナー基底とし，任意の i に対して $\partial^{\boldsymbol{g}^{(i)}_+} \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(I_A)$ とする．

定義 2.2. $A\boldsymbol{v} = \beta$ と $\partial^{\boldsymbol{g}^+_{(i)}} x^{\boldsymbol{v}} = 0$ の両方が成り立つとき，$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{w}$ に関する $H_A(\beta)$ の *fake exponent* と呼ぶ．

ジェネリックな重みベクトル $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{w}$ に関する $H_A(\beta)$ の fake exponent $\boldsymbol{v}$ を固定する. 以降は $\boldsymbol{u} \in L$ に対して，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})$ を $I_{\boldsymbol{u}}$ と表記する．特に, $I_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v})$ である．

$\boldsymbol{u} \in L$ に対して，

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) := \frac{[\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s}]_{\boldsymbol{u}_-}}{[\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{u}_+}}.$$

とおく．

補題 2.3. [4, Lemma 2.4] 仮定 2.1 を満たしているとき，$\boldsymbol{u} \in L$ に対して $a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) \neq 0$.

2.3 Okuyama, Saito による結果

$\boldsymbol{g}^{(i)}$ を $\mathcal{G}$ で得られたものとする．すなわち，$\boldsymbol{g}^{(i)}$ は $\partial^{\boldsymbol{g}^{(i)}_+} \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(I_A)$ を満たす I_A の被約グレブナー基底とし，

$$C(\boldsymbol{w}) := \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}\boldsymbol{g}^{(i)}.$$

と定義する．

$I_{\boldsymbol{u}}$ $(\boldsymbol{u} \in L)$ に対して，$\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})^c$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) &:= \{I_{\boldsymbol{u}} \mid \boldsymbol{u} \in L. \text{ If } I_{\boldsymbol{u}} = I_{\boldsymbol{u}'} \text{ for } \boldsymbol{u}' \in L, \text{ then } \boldsymbol{u}' \in C(\boldsymbol{w})\}\\ \mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})^c &:= \{I_{\boldsymbol{u}} \mid \boldsymbol{u} \in L\} \setminus \mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

次に，L の部分集合 L' を以下で定義する．

$$L' := \{\boldsymbol{u} \in L \mid I_{\boldsymbol{u}} \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})\}.$$

定義から $L' \subset C(\boldsymbol{w})$ である．

$$K := \bigcap_{I \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})} I$$

とし，$\mathbb{C}[\boldsymbol{s}]$ の斉次イデアル P を

$$P := \left\langle (B\boldsymbol{s})^{I \cup J \setminus K} \mid I \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v}), J \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})^c \right\rangle.$$

で定義し，その直交 $P^{\perp}$ を

$$\begin{aligned} P^{\perp} &:= \{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] \mid (q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet h(\boldsymbol{s}))_{|\boldsymbol{s}=0} = 0 \text{ for all } h(\boldsymbol{s}) \in P\} \\ &= \{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet P \subset \langle s_1, \ldots, s_h \rangle\} \end{aligned}$$

で定義する．ここで，$\mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] := \mathbb{C}[\partial_{s_1}, \ldots, \partial_{s_h}]$ である．ここで A-超幾何級数を

$$m(\boldsymbol{s}) := (B\boldsymbol{s})^{I_{\boldsymbol{0}} \setminus K},$$

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) := \sum_{\boldsymbol{u} \in L'} a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) x^{\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}},$$

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) := m(\boldsymbol{s}) F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}).$$

で定義する．$m(s)$ は F での極を打ち消す役割をしている．次に，$i = 1, \ldots, m$ に対して，$G^{(i)}$ と P_B を

$$G^{(i)} := I_{-\boldsymbol{g}^{(i)}} \setminus I_{\boldsymbol{0}},$$

$$P_B := \langle (B\boldsymbol{s})^{G^{(i)}} \mid i = 1, \ldots m \rangle.$$

で定義する．[4] では P と P_B の関係がいくつか示されており，本結果において次の [4, Proposition 3.4] が重要である．

$$m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B \subset P \subset P_B.$$

特に，$K = I_{\boldsymbol{0}}$ のとき $P = P_B$ である．直交についても同様の関係を見ることができる．

$U(\partial_{\boldsymbol{z}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{z}}]$ と $q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}]$ に対して，$\mathbb{C}$-線形作用素 $U(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_h}) \star q(\partial_{\boldsymbol{s}})$ を

$$U(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_h}) \star q(\partial_{\boldsymbol{s}}) := (U(\partial_{\boldsymbol{z}}) \bullet q(\boldsymbol{z}))|_{\boldsymbol{z}=\partial_{\boldsymbol{s}}} \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}].$$

で定義すると，

$$m(\boldsymbol{s}) \star P^{\perp} \subset P_B^{\perp} \subset P^{\perp}.$$

となる．特に，$K = I_{\boldsymbol{0}}$ のとき $P^{\perp} = P_B^{\perp}$ である．

定義 2.4. A-超幾何級数

$$x^v \cdot \sum_{u \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}} A} g_u(\log x) x^u \qquad (g_u \in \mathbb{C}[x])$$

が $\boldsymbol{w}$ 方向であるとは，$w \cdot u^{(j)} > 0 \ (j = 1, \ldots, n)$ であるような，ある $\mathbb{Q}^n$ の基底 $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$が存在し，$u \notin \sum_{j=1}^n \mathbb{Q}_{\geq 0} u^{(j)}$ のとき $g_u = 0$ を満たすときにいう．

次の定理が Okuyama, Saito[4] の主定理である．

定理 2.5. [4, Theorem 4.4] $P = m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B$ を満たすとき，$\boldsymbol{v}$ は exponent であり，

$$\{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet \tilde{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})_{|\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in P^{\perp}\}$$

は exponent $\boldsymbol{v}$ に関して，$M_A(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{w}$ 方向の解空間の基底を張る．

3 主定理

Okuyama, Saito による結果では，P の計算と $P = m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B$ を満たしているかの確認が非常に困難である．本講演における主定理は $P = m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B$ を常に満たし，P から分かる微分作用素の計算が非常に楽になる条件の明示である．

3.1 一般の A における主定理

$$\begin{aligned} \Delta &:= \{\sigma \mid (\boldsymbol{a}, \sigma) \in S(\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A)\}, \\ C &:= \cap_{\sigma \in \Delta} \sigma \quad (\subset [1, n]). \end{aligned}$$

とおく．

定理 3.1. $I_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ ならば $I_{\boldsymbol{0}} = K$.

系 3.2. $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ とする．このとき

$$\{(q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}))_{|\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in P_B^{\perp}\}$$

は exponent $\boldsymbol{v}$ に関して，$M_A(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{w}$ 方向の解空間の基底を張る．

3.2 A が unimodular の場合

定義 3.3. $\boldsymbol{w}$ による三角形分割 $\Delta_{\boldsymbol{w}}$ が unimodular であるとは，$\Delta_{\boldsymbol{w}}$ の全ての facet σ の標準体積が 1 であるときにいう．$A \in M_{d \times n}(\mathbb{Z})$ が unimodular であるとは，全ての $d \times d$ 小行列の行列式が $+1$ または -1 であるときにいう．

[5, p.139] から，A が unimodular ならば，全ての三角形分割は unimodular である．

定義 3.4.

$$\mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}}) := \bigcap_{F:\text{facet of } \Delta_{\boldsymbol{w}}} \mathbb{C}F.$$

系 3.5. $\Delta_{\boldsymbol{w}}$ を unimodular する．このとき $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}})$ ならば，$\boldsymbol{\beta}$ は $\boldsymbol{w}$ に関して唯一の fake exponent $\boldsymbol{v}$ を持つ．さらに，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ が成り立つとき，$I_{\boldsymbol{0}} = K$．特に，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}})$ のときは，フロベニウスの方法で $\boldsymbol{w}$ 方向の A-超幾何級数解を得られる．

例 3.6. [5, Example 4.2.7]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，重みベクトルを $\boldsymbol{w} = (5, 3, 1, 0, 0, 0)$ とおく．この重みについてのトーリックイデアルの被約グレブナー基底は，

$$I_A = \langle \partial_2\partial_5 - \partial_3\partial_6,\ \partial_1\partial_4 - \partial_3\partial_6,\ \partial_3\partial_5^2 - \partial_4^2\partial_6,\ \partial_2\partial_4^2 - \partial_3^2\partial_5,\ \partial_1\partial_5^2 - \partial_4\partial_6^2,$$
$$\partial_1\partial_3\partial_5 - \partial_2\partial_4\partial_6,\ \partial_1\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_4,\ \partial_1^2\partial_5 - \partial_2\partial_6^2,\ \partial_1^2\partial_3 - \partial_2^2\partial_6\rangle.$$

であり，生成元から得られる重みに関するイニシャルイデアルは，

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A = \langle \partial_2\partial_5,\ \partial_1\partial_4,\ \partial_3\partial_5^2,\ \partial_2\partial_4^2,\ \partial_1\partial_5^2,\ \partial_1\partial_3\partial_5,\ \partial_1\partial_3^2,\ \partial_1^2\partial_5,\ \partial_1^2\partial_3\rangle.$$

となる．このときの $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A$ から得られる standard pairs を考えよう．top dimensional prime は，

$$\begin{array}{cccc} (*, *, 0, 0, 0, *) & (0, 0, *, *, 0, *) & (0, *, *, 0, 0, *) & (0, 0, 0, *, *, *) \\ & (0, 0, *, *, 1, *) & (0, *, *, 1, 0, *), & \end{array}$$

embedded prime は，

$$(1, *, 1, 0, 0, *), \quad (1, 0, 0, 0, 1, *).$$

の計 8 種類の standard pairs があることがわかる．これらに対応する三角形分割の頂点 $\boldsymbol{a}_j$ の添字は，

$$\Delta = \{\{1, 2, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 6\}, \{6\}\},$$

であり，$C = \{6\}$ である．

$\boldsymbol{\beta} = (-1, 1, 0) = -\boldsymbol{a}_6$ とすると，この $\boldsymbol{\beta}$ に対応する fake exponent は 3 つあり，$\boldsymbol{v} = (0, 0, 0, 0, -1)$，$\boldsymbol{v}' = (0, 1, -\frac{3}{2}, 1, 0, -\frac{3}{2})$，$\boldsymbol{v}'' = (0, 0, \frac{1}{2}, -1, 1, -\frac{3}{2})$ である．$\boldsymbol{v}$ に対応する standard pairs は $(*, *, 0, 0, 0, *)$，$(0, *, *, 0, 0, *)$，$(0, 0, *, *, 0, *)$，$(0, 0, 0, *, *, *)$ であり，$\boldsymbol{v}'$ は $(0, *, *, 1, 0, *)$，$\boldsymbol{v}''$ は $(0, 0, *, *, 1, *)$ にそれぞれ対応している．このとき，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) = \{6\} = C$ なので，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}') = \emptyset \subset C$ と $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}') = \{4\} \not\subset C$ がわかる．よって，Theorem 3.1 から fake exponents $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{v}'$ について $I_{\boldsymbol{0}} \subset K$ が成り立つ．

参考文献

[1] A. Adolphson. Hypergeometric functions and rings generated by monomials. Duke Mathematical Journal, 1994, 73.2: 269.

[2] I.M. Gel'fand, A.V. Zelevinsky and M.M. Kapranov. Hypergeometric functions and toral manifolds. Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 1989, 23.2: 12-26.

[3] M. Nagamine. A-hypergeometric series with parameters in the core. arXiv preprint arXiv:2404.11085, 2024.

[4] G. Okuyama and M. Saito. Logarithmic A-hypergeometric series II. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 2023, 64.4: 1057-1086.

[5] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Algorithms and Computation in Mathematics, 2000, 6.